

Построение программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы с пуассоновскими возмущениями

Е. В. Карачанская

Тихоокеанский государственный университет, Россия, Хабаровск

Аннотация

В статье предлагается метод построения программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы, подверженной пуассоновским возмущениям.

Введение

Одной из задач управления является организация управления динамической системой таким образом, чтобы при ее эволюции важные характеристики системы (в том числе и зависящие от положения системы), сохранялись. В реальном пространстве на динамическую систему оказывают влияние случайные факторы. Наиболее удачно это случайное воздействие можно описать с помощью винеровских и пуассоновских процессов. В последнее время было предложено несколько способов построения управлений системой при наличии винеровских процессов. В данной работе предлагается метод построения программного управления с вероятностью 1 для системы, подверженной возмущениям в виде винеровских и пуассоновских процессов. Предложенный метод основан на понятии первого интеграла для системы стохастических дифференциальных уравнений с винеровскими и пуассоновскими возмущениями [1, 2, 3] и алгоритме построения автоморфной функции [4].

1 Стохастический первый интеграл системы СДУ

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}(t)$ – случайный процесс, являющийся решением системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= a_i(t; \mathbf{x}(t))dt + \sum_{k=1}^m b_{ik}(t; \mathbf{x}(t))dw_k(t) + \int_{R(\gamma)} g_i(t; \mathbf{x}(t); \gamma)\nu(dt; d\gamma) \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \Big|_{t=0} = \mathbf{x}_0, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{w}(t)$ – m -мерный винеровский процесс, $\nu(t; \Delta\gamma)$ – однородная по t , нецентрированная мера Пуассона [5]. Эту систему можно записать в векторной форме

$$d\mathbf{x}(t) = A(t; \mathbf{x}(t))dt + B(t; \mathbf{x}(t))d\mathbf{w}(t) + \int_{R(\gamma)} \nu(dt; d\gamma) \cdot G(t; \mathbf{x}(t); \gamma).$$

Относительно коэффициентов $a_i(t; \mathbf{x})$, $b_{ik}(t; \mathbf{x})$ и $g_i(t; \mathbf{x}; \gamma)$ уравнения (1) будем предполагать, что они выбраны таким образом, чтобы были обеспечены условия существования и единственности решения, как и во всех уравнениях, рассматриваемых ниже.

В [1] было введено понятие первого интеграла для системы стохастических дифференциальных уравнений Ито (без пуассоновской составляющей), в [3] – понятие стохастического первого интеграла для системы обобщенных стохастических дифференциальных уравнений Ито с центрированной пуассоновской мерой. Введем аналогичное понятие для случая наличия нецентрированной меры Пуассона.

Пусть $u(t; \mathbf{x}; \omega)$ – случайная функция, определенная на том же вероятностном пространстве, что и решение системы (1).

Определение 1 Случайную функцию $u(t; \mathbf{x}; \omega)$ назовем стохастическим первым интегралом системы (1), если с вероятностью 1

$$u(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{x}(0)); \omega) = u(0; \mathbf{x}(0))$$

для любого решения $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(0); \omega)$ системы (1).

Чтобы функция $u(t; \mathbf{x}; \omega)$ была первым интегралом системы (1), должны выполняться условия \mathcal{L} :

1. $\sum_{i=1}^n b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} = 0$, для всех $k = \overline{1, m}$ (компенсация винеровского возмущения);
2. $\frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} \left[a_i(t; \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \right] = 0$ (независимость от времени);
3. $u(t; \mathbf{x}) - u\left(t; \mathbf{x} + G(t; \mathbf{x}; \gamma)\right) = 0$ для любых $\gamma \in R(\gamma)$ во всей области определения процесса (компенсация пуассоновских скачков).

Замечание 1 В случае, когда рассматриваем конкретную реализацию, т. е. параметр ω в дальнейшем не влияет, неслучайную функцию $u(t; \mathbf{x})$ можно считать детерминированным первым интегралом стохастической системы.

В [3] было введено понятие стохастического первого интеграла для центрированной пуассоновской меры, и полученные условия для его существования учитывают необходимость задания плотности интенсивности пуассоновского распределения в отличие от предложенного в данной статье. Таким образом, безразлично, каков вероятностный закон имеют интенсивности пуассоновских скачков.

2 Построение системы обобщенных СДУ с заданным первым интегралом

Определим вид системы обобщенных стохастических уравнений Ито с начальными данными, имеющей известный стохастический первый интеграл.

Теорема 1 Пусть функция $u(t, \mathbf{x})$ – непрерывна вместе со своими производными по совокупности переменных (t, \mathbf{x}) и случайная функция $u(t, \mathbf{x}; \omega)$ определена на том же вероятностном пространстве, что и решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}(t) = A(t; \mathbf{x}(t))dt + B(t; \mathbf{x}(t))d\mathbf{w}(t) + \int_{R(\gamma)} \nu(dt; d\gamma) \cdot G(t; \mathbf{x}(t); \gamma) \quad (2)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \Big|_{t=0} = \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0,$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; $\mathbf{w}(t)$ – m -мерный винеровский процесс; $\nu(t; \Delta\gamma)$ – однородная по t , нецентрированная мера Пуассона. Если $u(t, \mathbf{x}; \omega)$ является стохастическим первым интегралом системы (2), то коэффициенты уравнения (2) и функция $u(t, \mathbf{x})$ связаны следующими соотношениями:

1. коэффициенты $B_k(t; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n b_{ik}(t; \mathbf{x}) \vec{e}_i$ ($k = \overline{1, m}$) – столбцы матрицы $B(t; \mathbf{x})$, $B_k(t; \mathbf{x}) \in \{q_{00} \cdot M_{n+1,0}\}$, $M_{n+1,0}$ – минор элемента $h_{n+1,0}$ матрицы $H(t; \mathbf{x})$:

$$H(t; \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \vec{e}_0 & \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \\ \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial t} & \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_n} \\ h_{30} & h_{31} & \dots & h_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n+1,0} & h_{n+1,1} & \dots & h_{n+1,n} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

2. коэффициент $A(t; \mathbf{x})$ принадлежит множеству функций, определяемых условием

$$A(t; \mathbf{x}) \in \left\{ R(t; \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial B_k(t; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \cdot B_k(t; \mathbf{x}) \right\}, \quad (4)$$

где $\left[\frac{\partial B_k(t; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]$ – матрица Якоби для векторной функции $B_k(t; \mathbf{x})$; $C(t; \mathbf{x})$ – алгебраическое дополнение элемента \vec{e}_0 матрицы $H(t; \mathbf{x})$ и $\det C(t; \mathbf{x}) \neq 0$; матрица-столбец $R(t; \mathbf{x})$, компоненты которой $r_i(t; \mathbf{x})$, $i = \overline{1, n}$, определяются следующим образом:

$$C^{-1}(t; \mathbf{x}) \cdot \det H(t; \mathbf{x}) = \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^n r_i(t; \mathbf{x}) \vec{e}_i;$$

3. коэффициент $G(t; \mathbf{x}; \gamma) = \sum_{i=1}^n g_i(t; \mathbf{x}; \gamma) \vec{e}_i$ при пуассоновской мере определяется представлением $G(t; \mathbf{x}; \gamma) = \mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma) - \mathbf{x}$, где $\mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma)$ – решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{y}(\cdot; \gamma)}{\partial \gamma} = \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \dots & \vec{e}_n \\ \frac{\partial u(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma))}{\partial y_1} & \frac{\partial u(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma))}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma))}{\partial y_n} \\ \varphi_{31}(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma)) & \varphi_{32}(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma)) & \dots & \varphi_{3n}(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma)) & \varphi_{n2}(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma)) & \dots & \varphi_{nn}(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma)) \end{bmatrix} \quad (5)$$

удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma) \Big|_{\gamma=0} = \mathbf{x}$.

Относительно произвольных функций $h_{ij} = h_{ij}(t, \mathbf{x})$, $\varphi_{ij} = \varphi_{ij}(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma))$ полагаем, что они выбраны таким образом, чтобы каждое семейство функций $\{h_i\}$, $\{\varphi_i\}$, определяемое условиями:

$$h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial h_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad \varphi_{ij}(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma)) = \frac{\partial \varphi_i(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma))}{\partial y_j},$$

составляло вместе с функцией $u(t; \mathbf{x})$ совокупность независимых функций.

Доказательство. Доказательство состоит из 3-х частей.

1. Воспользуемся первым из условий \mathcal{L} : $\sum_{i=1}^n b_{ik}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} = 0$, для всех $k = \overline{1, m}$.

Если $B_k(t; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n b_{ik}(t; \mathbf{x}) \vec{e}_i$ и $\nabla_{\mathbf{x}} u(t; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} \vec{e}_i$, то это условие – есть условие ортогональности векторов $B_k(t; \mathbf{x})$ и $\nabla_{\mathbf{x}} u(t; \mathbf{x})$. Опираясь на определение векторного произведения в пространстве \mathbb{R}^n и его свойства, получаем утверждение для коэффициентов $B_k(t; \mathbf{x})$ и, соответственно, матрицы $B(\cdot) = (B_1(\cdot), \dots, B_m(\cdot))$:

$$B_k(t; \mathbf{x}) \in \left\{ q_{00} \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \\ \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_n} \\ f_{31} & \dots & f_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix} \right\};$$

где функции $f_i = f_i(t, \mathbf{x})$, $i = \overline{3, n}$, такие, что $f_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial f_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_j}$ вместе с функцией $u(t, \mathbf{x})$ образуют совокупность независимых функций.

2. Воспользуемся вторым из условий \mathcal{L} :

$$\frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} \left[a_i(t; \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \right] = 0.$$

Пусть

$$Q(t; \mathbf{x}) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i(t; \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_j}.$$

Следуя схеме, изложенной в работе [2], введем в рассмотрение векторы: обобщенный градиент

$$\square u(t; \mathbf{x}) = \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial t} \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

и

$$\vec{Q}(t; \mathbf{x}) = \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^n a_i(t; \mathbf{x}) \vec{e}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \vec{e}_i.$$

Указанное условие означает, что векторы $\square u(t; \mathbf{x})$ и $\vec{Q}(t; \mathbf{x})$ ортогональны. Воспользовавшись снова определением векторного произведения и его свойства, получаем формулу (3): $\vec{Q}(t; \mathbf{x}) \in \{\det H\}$, где функции $h_i = f_i(t, \mathbf{x})$, $i = \overline{3, n+1}$, такие, что $h_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial h_i(t, \mathbf{x})}{\partial x_j}$ вместе с функцией $u(t, \mathbf{x})$ образуют совокупность независимых функций. Без ограничения общности, будем считать, что $h_{ij}(t, \mathbf{x}) = f_{ij}(t, \mathbf{x})$. Введем вектор

$$\vec{A}(t; \mathbf{x}) = \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^n a_i(t; \mathbf{x}) \vec{e}_i = \vec{Q}(t; \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \vec{e}_i$$

и, в силу того, что коэффициент при \vec{e}_0 должен быть равен 1, получаем:

$$\vec{A}(t; \mathbf{x}) \in \left\{ C^{-1}(t; \mathbf{x}) \cdot \det H(t; \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} \vec{e}_i \right\},$$

где $C(t; \mathbf{x})$ – алгебраическое дополнение элемента \vec{e}_0 матрицы $H(t; \mathbf{x})$, $\det C(t; \mathbf{x}) \neq 0$. Поскольку вектор $C^{-1}(t; \mathbf{x}) \cdot \det H(t; \mathbf{x})$ можно записать в виде:

$$C^{-1}(t; \mathbf{x}) \cdot \det H = \vec{e}_0 + \sum_{i=1}^n r_i(t; \mathbf{x}) \vec{e}_i,$$

то введем матрицу-столбец $R(t; \mathbf{x})$ с компонентами $r_i(t; \mathbf{x})$, $i = \overline{1, n}$.

Определение произведения матриц в данном случае допускает представление:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n b_{jk}(t; \mathbf{x}) \frac{\partial b_{ik}(t; \mathbf{x})}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \left[\frac{\partial B_k(t; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \cdot B_k(t; \mathbf{x}),$$

где $\left[\frac{\partial B_k(t; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]$ – матрица Якоби для векторной функции $B_k(t; \mathbf{x})$. Следовательно, $A(t; \mathbf{x})$ определяется суммой матриц (4):

$$A(t; \mathbf{x}) \in \left\{ R(t; \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial B_k(t; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \cdot B_k(t; \mathbf{x}) \right\},$$

3. Исходя из третьего условия в \mathcal{L} , для любых $\gamma \in R(\gamma)$ должно выполняться условие:

$$u(t; \mathbf{x}; \omega) - u(t; \mathbf{x} + G(t; \mathbf{x}; \gamma); \omega) = 0.$$

Это означает, что функция $u(t; \mathbf{x}; \omega)$ является автоморфной при преобразовании ее аргумента \mathbf{x} с помощью функции $G(t; \mathbf{x}; \gamma)$. Определим условия, налагаемые на эту функцию. Следуя [3], положим: $\mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma) = \mathbf{x} + G(t; \mathbf{x}; \gamma)$. Для упрощения записи будем опускать параметр ω . Тогда $u(t; \mathbf{x}) = u(t; \mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma))$ любых $\gamma \in R(\gamma)$ или $\frac{\partial u(t; \mathbf{x})}{\partial \gamma} = 0$ и

$$\frac{\partial u(t; \mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma))}{\partial \gamma} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t; \mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma))}{\partial y_i} \frac{\partial y_i(t; \mathbf{x}; \gamma)}{\partial \gamma} = 0.$$

Последнее равенство означает, что векторы $\nabla_{\mathbf{y}} u(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma))}{\partial y_i} \vec{e}_i$ и $\frac{\partial \mathbf{y}(\cdot; \gamma)}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i(\cdot; \gamma)}{\partial \gamma} \vec{e}_i$ ортогональны, и следовательно, связаны соотношением:

$$\frac{\partial \mathbf{y}(\cdot; \gamma)}{\partial \gamma} \in \left\{ \det \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_n \\ \frac{\partial u(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma))}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial u(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma))}{\partial y_n} \\ \varphi_{31} & \dots & \varphi_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} \right\}, \quad (6)$$

где функции $\varphi_i(t; \mathbf{y})$, $i = \overline{3, n}$, такие что $\varphi_{ij} = \frac{\partial \varphi_i(t; \mathbf{y})}{\partial y_j}$, составляют с функцией $u(t; \mathbf{y}(\cdot; \gamma))$ систему независимых функций. Поскольку $\mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma) = \mathbf{x} + G(t; \mathbf{x}; \gamma)$, то (6) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений, в которой неизвестной является функция $\mathbf{y}(\cdot; \gamma)$. Разложим определитель (6) по первой строке. Следовательно, $\frac{\partial \mathbf{y}(\cdot; \gamma)}{\partial \gamma} = \alpha \sum_{i=1}^n S_i(\mathbf{y}(\cdot; \gamma)) \vec{e}_i$, где α – произвольная функция, не зависящая от \mathbf{y} . Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial y_1(\cdot; \gamma)}{\partial \gamma} = \alpha S_1(\mathbf{y}(\cdot; \gamma)), \\ \dots \\ \frac{\partial y_n(\cdot; \gamma)}{\partial \gamma} = \alpha S_n(\mathbf{y}(\cdot; \gamma)). \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma; \theta)$ – решение этой системы, где θ – вектор постоянных, появившихся при ее интегрировании. Поскольку условие (??) должно выполняться для любых t , \mathbf{x} и γ , то

$$u(t; \mathbf{x}) = u(t; \mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma_1; \theta)) = u(t; \mathbf{x} + G(t; \mathbf{x}; \gamma_1; \theta)) = u(t; \mathbf{x} + G(t; \mathbf{x}; \gamma_2; \theta)),$$

В частном случае, при некотором значении $\gamma = \gamma_o$ последнее равенство будет определяться условием $G(t; \mathbf{x}; \gamma_o; \theta) = 0$. Без ограничения общности (при отсутствии скачка), положим:

$$G(t; \mathbf{x}; \gamma_o; \theta) \equiv G(t; \mathbf{x}; 0) = 0.$$

Следовательно, функция $G(t; \mathbf{x}; \gamma)$, обеспечивающая автоморфизм функции $u(t; \mathbf{x})$ определяется представлением $G(t; \mathbf{x}; \gamma) = \mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma) - \mathbf{x}$, где $\mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma)$ – решение системы дифференциальных уравнений (5) при начальном условии $\mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma)|_{\gamma=0} = \mathbf{x}$. Таким образом, последнее утверждение теоремы доказано.

3 Построение программных управлений

Очень часто возникает задачи управления динамической системой, в которой сохраняются заданные функционалы [6], причем влияние случайных возмущений, действующих на данную систему, должно быть сведено к минимуму. Понятие стохастического первого интеграла системы стохастических дифференциальных уравнений с

винеровскими и пуассоновскими возмущениями позволяет строить такие управления с вероятностью 1, то есть полностью исключая влияние данных случайных возмущений.

По аналогии с [7] введем следующее определение.

Определение 2 Программным движением стохастической системы

$$d\mathbf{x}(t) = \left[P(t; \mathbf{x}(t)) + Q(t; \mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{s}(t; \mathbf{x}(t)) \right] dt + B(t; \mathbf{x}(t)) d\mathbf{w}(t) + \int_{R(\gamma)} G(t; \mathbf{x}(t); \gamma) \nu(dt; d\gamma), \quad (7)$$

где $\mathbf{w}(t)$ – m -мерный винеровский процесс; $\nu(t; \Delta\gamma)$ – нецентрированная пуассоновская мера, будем называть решение $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_o, \mathbf{s}; \omega)$, позволяющее с вероятностью 1 при некотором управлении (программном управлении) $\mathbf{s}(t; \mathbf{x})$ для всех t оставаться на неслучайном интегральном многообразии $u(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_o)) = u(0; \mathbf{x}_o)$, являющимся первым интегралом уравнения (7) при заданных начальных условиях

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_o) \Big|_{t=0} = \mathbf{x}_o.$$

Таким образом, можно построить программное управление с вероятностью 1 для динамической системы, подверженной случайному воздействию винеровских и пуассоновских процессов.

Теорема 2 Программное управление, позволяющее с вероятностью 1 динамической системе (7) при наличии винеровских и пуассоновских возмущений оставаться на интегральном многообразии $u(t; \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_o); \omega) = u(0; \mathbf{x}_o)$, является решением системы, состоящей из уравнений (7) и (2), в которой коэффициенты второго уравнения и соответствующие коэффициенты первого определяются в соответствии с Теоремой 1. При этом определяются также реакции на случайные возмущения, обеспечивающие это программное управление.

Рассмотрим на примере.

Пример 1 Найти управления и реакции на случайные возмущения, чтобы динамическая система

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \left(x_1(t) + x_2(t) + e^{-t} + s_1(t; \mathbf{x}) \right) dt + b_1(t; \mathbf{x}) dw(t) + \int_{R(\gamma)} g_1(t; \mathbf{x}; \gamma) \nu(dt; d\gamma), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \left(x_1(t)x_2(t) + e^{-2t} + s_2(t; \mathbf{x}) \right) dt + b_2(t; \mathbf{x}) dw(t) + \int_{R(\gamma)} g_2(t; \mathbf{x}; \gamma) \nu(dt; d\gamma), \end{aligned}$$

подверженная воздействию винеровского процесса и совершающая скачки по действию пуассоновского процесса, с вероятностью 1 совершала движение по поверхности $u(t; \mathbf{x}) = x_2 e^{-2x_1}$.

Решение. Сначала построим систему стохастических дифференциальных уравнений, для которой функция $u(t; \mathbf{x}) = x_2 e^{-2x_1}$ является детерминированным первым интегралом. В соответствии с утверждением 2 теоремы 1 определим функцию, обеспечивающую автоморфизм функции $u(t; \mathbf{x}) = x_2 e^{-2x_1}$. Тогда

$$\frac{\partial u(\mathbf{y}; t)}{\partial y_1} = -2y_2 e^{-2y_1}, \quad \frac{\partial u(\mathbf{y}; t)}{\partial y_2} = e^{-2y_1}$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{y}(t; \mathbf{x}; \gamma)}{\partial \gamma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1(t; \mathbf{x}; \gamma)}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial y_2(t; \mathbf{x}; \gamma)}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2y_1} \\ 2y_2 e^{-2y_1} \end{pmatrix}$$

Решение этой системы с учетом начальных данных:

$$y_1(t; \mathbf{x}; \gamma) = \frac{1}{2} \ln(2\gamma + e^{2x_1}), \quad y_2(t; \mathbf{x}; \gamma) = 2x_2 \gamma e^{-2x_1} + x_2.$$

Следовательно, преобразование $g(\cdot) = (g_1(\cdot), g_2(\cdot))^*$, обеспечивающее функции $u(t; \mathbf{x}) = x_2 e^{-2x_1}$ автоморфизм, имеет функции-координаты:

$$g_1(t; \mathbf{x}; \gamma) = \frac{1}{2} \ln(2\gamma + e^{2x_1}) - x_1, \quad g_2(t; \mathbf{x}; \gamma) = 2x_2 \gamma e^{-2x_1}.$$

Теперь, в соответствии с теоремой 1, строим матрицу B (в данном случае – вектор-столбец, поскольку $\mathbf{w}(t)$ – одномерный винеровский процесс):

$$B(t; \mathbf{x}) = q_{00}(e^{-2x_1}, 2x_2 e^{-2x_1})^*,$$

$$\text{где } q_{00} = q_{00}(t; \mathbf{x}), \left[\frac{\partial B(t; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] = q_{00} \begin{pmatrix} -2e^{-2x_1} & 0 \\ 4x_2 e^{-2x_1} & 2e^{-2x_1} \end{pmatrix}, \left[\frac{\partial B(t; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] B(t; \mathbf{x}) = q_{00}^2 \begin{pmatrix} -4e^{-2x_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4q_{00}^2 e^{-4x_1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Опираясь на формулу (4) строим матрицу $H(t; \mathbf{x})$ и вычисляем ее определитель

$$\det H(t; \mathbf{x}) = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_0 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ 0 & -2x_2 e^{-2x_1} & e^{-2x_1} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{e}_0(-2f_3 x_2 e^{-2x_1} - f_2 e^{-2x_1}) + \vec{e}_1(f_1 e^{-2x_1}) + \vec{e}_2(2f_1 x_2 e^{-2x_1}),$$

где $f_i = f_i(t; \mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$. В итоге (из (4)), коэффициенты вектора $A = A(t; \mathbf{x})$ имеют вид:

$$a_1 = -\frac{f_1}{f_2 + 2f_3 x_2} + 2q_{00}^2 e^{-4x_1},$$

$$a_2 = -\frac{2f_1 x_2}{f_2 + 2f_3 x_2},$$

и искомая система стохастических дифференциальных уравнений такова:

$$dx_1(t) = \left[-\frac{f_1}{f_2 + 2f_3 x_2} + 2q_{00}^2 e^{-4x_1} \right] dt +$$

$$+ q_{00} e^{-2x_1} dw(t) + \int_{R(\gamma)} \left(\frac{1}{2} \ln(2\gamma + e^{2x_1}) - x_1 \right) \nu(dt; d\gamma)$$

$$dx_2(t) = \left[-\frac{2f_1 x_2}{f_2 + 2f_3 x_2} \right] dt +$$

$$+ q_{00} 2x_2 e^{-2x_1} dw(t) + \int_{R(\gamma)} (2x_2 \gamma e^{-2x_1}) \nu(dt; d\gamma)$$

Искомое управление – решение системы линейных уравнений (теорема 2):

$$\begin{aligned}x_1(t) + x_2(t) + e^{-t} + s_1(t; \mathbf{x}) &= -\frac{f_1}{f_2 + 2f_3x_2} + 2q_{00}^2 e^{-4x_1}, \\x_1(t)x_2(t) + e^{-2t} + s_2(t; \mathbf{x}) &= -\frac{2f_1x_2}{f_2 + 2f_3x_2}.\end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}s_1(t; \mathbf{x}) &= -\frac{f_1}{f_2 + 2f_3x_2} + 2q_{00}^2 e^{-4x_1} - x_1(t) - x_2(t) - e^{-t}, \\s_2(t; \mathbf{x}) &= -\frac{2f_1x_2}{f_2 + 2f_3x_2} - x_1(t)x_2(t) - e^{-2t},\end{aligned}$$

где $f_i = f_i(t; \mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$, $q_{00} = q_{00}(t; \mathbf{x})$. Реакция на возмущение, вызванное винеровским процессом, определяется матрицей-столбцом с элементами

$$b_1(t; \mathbf{x}) = q_{00}e^{-2x_1}, \quad b_2(t; \mathbf{x}) = q_{00}2x_2e^{-2x_1}.$$

Элементы для компенсатора пуассоновских скачков определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}g_1(t; \mathbf{x}; \gamma) &= \frac{1}{2} \ln(2\gamma + e^{2x_1}) - x_1, \\g_2(t; \mathbf{x}; \gamma) &= 2x_2\gamma e^{-2x_1}.\end{aligned}$$

Выбор функций $f_i(t; \mathbf{x})$, $i = 1, 2, 3$ и $q_{00}(t; \mathbf{x})$ позволяет строить управление, опираясь на какие-либо условия, например, удобством для моделирования и реализации управления.

Замечание 2 Отметим, что можно строить программное управления по многообразию, определяемому несколькими функциями [6].

Выводы

Применение теории стохастического первого интеграла позволяет строить с вероятностью 1 программные управления для динамической системы при наличии случайных возмущений, вызванных винеровскими [7] и пуассоновскими процессами.

Автор благодарен проф. В.А.Дубко за внимание к данной работе.

Список литературы

- [1] Дубко В. А. Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений: препринт. – Киев : АН УССР, Ин-т математики, 1978. — 22 с.
- [2] Дубко В. А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. – Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1989. — 185 с.
- [3] Дубко В. А. Открытые эволюционирующие системы.// "Відкриті еволюційні системи" міжнар. наук.-практ. конф. (2002, Київ) Перша міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюційні системи" (26-27 квіт. 2002 р.) (Додаток). К., ВНЗ ВМУРоЛ, 2002. — С. 14-31. <http://openevolingsystems.narod.ru/indexUkr.htm>

- [4] Дубко В. А. Проблема инвариантности и алгоритм построения множества автоморфных преобразований для заданной функции. // "Відкриті еволюційні системи" міжнар. наук.-практ. конф. (II; 2003, Київ) Перша міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюційні системи" (1-30 грудня 2003 р.) – Том II, К., ВНЗ ВМУРол, 2004. — С. 66-68. <http://openevolvingssystemsnarod.ru/indexUkr.htm>
- [5] Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наук. Думка, 1968. – 354 с.
- [6] В поисках скрытого порядка (Методологические проблемы изучения региона) / В. А. Дубко, Ф. Н. Рянский, Э. М. Сороко, В. Н. Шолпо, В. В. Юшманов. – Владивосток: Дальнаука, 1995.– 106 с.
- [7] Чалых Е. В. Построение множества программных управлений с вероятностью 1 для одного класса стохастических систем // Автоматика и телемеханика. – 2009. – 70, № 8. – С. 110-122.